



① نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 10x + 25}$ در بازه $[a, b]$ وارون پذیر است.

بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- ۱ (۴) ۳ (۳) ۴ (۲) ۶ (۱)

② اگر $(f \circ g^{-1})^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ و $f(x) = 3x - 1$ باشد، حاصل $g(\frac{1}{3})$ کدام است؟

- $\frac{-3}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{-1}{3}$ (۱)

③ دو تابع $f = \{(5, 2), (4, 4), (3, 5)\}$ و $g(x) = 3x + 1$ مفروض اند. اگر $g^{-1}(2f^{-1}(a)) = 3$ باشد، a کدام است؟

- ۵ (۴) ۴ (۳) ۳ (۲) ۲ (۱)

④ ضابطه وارون تابع $y = -\sqrt{x+4} - 3$ در کدام گزینه آمده است؟

- $y = -x^2 + 6x + 5, x \leq -3$ (۲) $y = x^2 + 6x + 5, x \leq -3$ (۱)
 $y = -x^2 + 6x + 5, x \geq -2$ (۴) $y = x^2 + 6x + 5, x \geq -2$ (۳)

⑤ اگر $f^{-1} = \{(3, 1), (2, -1), (4, 3)\}$ و $g(x) = x^3 + x$ باشد، حاصل $g^{-1}(f(-1))$ کدام است؟

- ۳ (۴) -۱ (۳) صفر (۲) ۱ (۱)

⑥ کدام تابع یک به یک نیست؟

- $y = 2^x - 3^{-x}$ (۲) $y = \sqrt{x} + |x+2|$ (۱)
 $y = x^3 + x$ (۴) $y = x^6 - x^2$ (۳)

⑦ تابع $f(x) = \frac{x+2}{2x-3}$ مفروض است. حاصل جمع طول نقاط برخورد دو تابع $f^{-1}(x)$ و $f(x)$ کدام است؟

- ۱ (۴) -۲ (۳) ۲ (۲) -۱ (۱)

⑧ اگر $f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-1}$ و $(f^{-1} \circ g)(x) = \frac{1}{x} f(x)$ باشد، ضابطه تابع g کدام است؟

- $g(x) = \frac{1}{-2x+3}$ (۴) $g(x) = \frac{2}{-2x+5}$ (۳) $g(x) = \frac{1}{2x-3}$ (۲) $g(x) = \frac{1}{-2x+5}$ (۱)

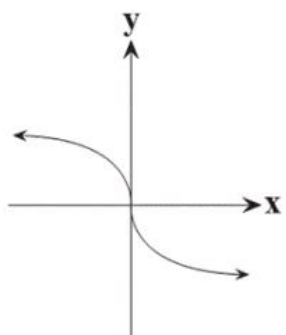
⑨ در تابع $f(x) = \frac{2x+3}{x+a}$ مقدار a را طوری انتخاب کرده ایم که f^{-1} بر f منطبق باشد، مقدار a کدام است؟

- ۲ (۴) -۱/۵ (۳) -۲ (۲) ۱/۵ (۱)

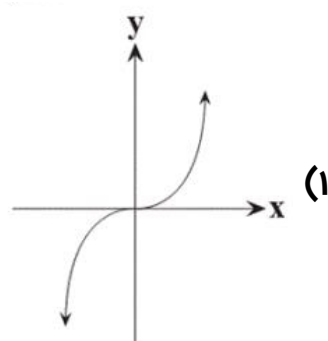
⑩ اگر f و g توابعی وارون‌پذیر، با دامنه و برد $\mathbb{R}$ باشند و داشته باشیم: $f^{-1}(g(4)) = 5$ و $g^{-1}(f^{-1}(3)) = 4$ آن‌گاه حاصل $f(f(5))$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) اطلاعات کافی نیست. مسئله

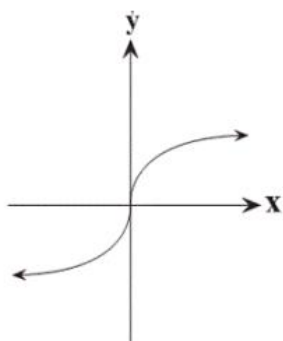
⑪ نمودار وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & ; x \leq 0 \\ -\sqrt{x} & ; x > 0 \end{cases}$ کدام است؟



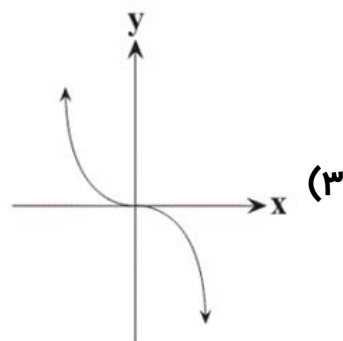
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

⑫ اگر $f(x) = g(2x + 5)$ و $g^{-1}(x) = \sqrt[5]{8x}$ باشند، آن‌گاه حاصل $f^{-1}(4)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

ساده

درصد پاسخگویی ۳۸٪

قلم‌چی ۱۴۰۰

گزینه درست: ۱

سوال ۱

گزینه «۱»

$$f(x) = |x+1| - |x-5| = \begin{cases} 6 & x > 5 \\ 2x-4 & -1 \leq x \leq 5 \\ -6 & x < -1 \end{cases}$$

پس بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن یک‌به‌یک است، بازه $[-1, 5]$ است.

$$\Rightarrow \text{Max}(b-a) = 5 - (-1) = 6 \quad \text{در نتیجه:}$$

سوال ۲

گزینه درست: ۱

قلمچی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۳۶%

ساده

گزینه «۱»

به کمک رابطه $(fog)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ می توان نوشت:

$$gof^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

برای محاسبه $g(\frac{1}{3})$ باید $f^{-1}(x)$ را برابر $\frac{1}{3}$ قرار دهیم یا به عبارتی مقدار $f(\frac{1}{3})$ مطلوب است. پس:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow x = f(\frac{1}{3}) \quad f(\frac{1}{3}) = 3(\frac{1}{3}) - 1 = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = \frac{1}{3}$$

$$g(\frac{1}{3}) = g(f^{-1}(0)) = \frac{2(0)+1}{0-3} = \frac{-1}{3}$$

سوال ۳

گزینه درست: ۱

قلمچی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۵۱%

ساده

گزینه «۱»

$$g^{-1}(2f^{-1}(a)) = 3 \Rightarrow 2f^{-1}(a) = g(3) \xrightarrow{g(3)=10} 2f^{-1}(a) = 10$$

$$\xrightarrow{\div 2} f^{-1}(a) = 5 \Rightarrow a = f(5) \Rightarrow a = 2$$

سوال ۴

گزینه درست: ۱

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۵۱%

ساده

گزینه «۱»

ابتدا برد تابع را به دست می آوریم:

$$\sqrt{x+4} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x+4} \leq 0 \Rightarrow -\sqrt{x+4} - 3 \leq -3 \Rightarrow y \leq -3$$

بنابراین دامنه وارون تابع برابر $x \leq -3$ است.

حال ضابطه وارون را به دست می آوریم:

$$y = -\sqrt{x+4} - 3 \Rightarrow y+3 = -\sqrt{x+4}$$

$$\xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} (y+3)^2 = x+4$$

$$x = y^2 + 6y + 5 \xrightarrow[y \rightarrow x]{x \rightarrow y} y = x^2 + 6x + 5$$

$$y = x^2 + 6x + 5; x \leq -3 \text{ : وارون تابع}$$

سوال ۵

گزینه درست: ۱

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۴۸%

ساده

گزینه «۱»

$f^{-1}(2) = -1$ است پس $f(-1) = 2$ می شود. ما حاصل $g^{-1}(f(-1))$ یعنی $g^{-1}(2)$ را می خواهیم. پس باید $g(x)$ را برابر ۲

بگذاریم:

$$g(x) = x^3 + x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow g(1) = 2 \Rightarrow g^{-1}(2) = 1$$

سوال ۶

گزینه درست: ۳

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۴۵%

ساده

گزینه «۳»

در گزینه «۱» هم $\sqrt{x}$ و هم $|x+2|$ با شرط $(x \geq 0)$ اکیداً صعودی‌اند، پس جمع آن‌ها نیز اکیداً صعودی و یک به یک است.

در گزینه «۲» 2^x و -3^{-x} اکیداً صعودی‌اند.

در گزینه «۴» x هم و هم x^3 اکیداً صعودی‌اند.

در گزینه «۳»، به ازای $x = 0$ و $x = -1$ داریم: $y = 0$.

سوال ۷

گزینه درست: ۲

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۸%

ساده

گزینه «۲»

$$y = \frac{x+2}{2x-1} \Rightarrow 2xy - y = x + 2 \Rightarrow x(2y-1) = 2y+2$$

$$\Rightarrow x = \frac{2y+2}{2y-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+2}{2x-1}$$

$$f(x) = f^{-1}(x) = \frac{2x+2}{2x-1} = \frac{x+2}{2x-1} \Rightarrow 2x^2 - 5x - 6 = 2x^2 + 3x - 2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 8x - 4 = 0 \Rightarrow \text{جمع طول نقاط برخورد} = 2$$

سوال ۸

گزینه درست: ۱

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۱۸%

متوسط

گزینه «۱»

ابتدا وارون تابع $f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-1}$ را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{2x}{x-1} \Rightarrow xy - y = 2x \Rightarrow xy - 2x = y$$

$$\Rightarrow x(y-2) = y \Rightarrow x = \frac{y}{y-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(g(x)) = \frac{1}{x} f(x) \Rightarrow \frac{f(g(x))}{g(x)-1} = \frac{1}{x} \left(\frac{x}{x-2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{f(g(x))}{g(x)-1} = \frac{1}{x-2}$$

$$2xg(x) - fg(x) = g(x) - 1 \Rightarrow 2xg(x) - 5g(x) = -1$$

$$\Rightarrow g(x)(2x-5) = -1 \Rightarrow g(x) = \frac{-1}{2x-5} = \frac{1}{-2x+5}$$

سوال ۹

گزینه درست: ۲

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۲%

ساده

گزینه «۲»

مسئله را با نقطه‌گذاری حل می‌کنیم:

با توجه به تعریف تابع وارون می‌دانیم که اگر $(a, b) \in f$ آن‌گاه $(b, a) \in f^{-1}$

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+a} \Rightarrow f\left(\frac{-3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}, 0\right) \in f$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف تابع وارون}} \left(0, -\frac{3}{2}\right) \in f^{-1}$$

به دلیل آن‌که تابع f و f^{-1} بر هم منطبق هستند، پس: $f(0) = f^{-1}(0)$

$$f(0) = f^{-1}(0) \xrightarrow{f^{-1}(0) = -\frac{3}{2}} f(0) = \frac{-3}{2} \Rightarrow \frac{3}{a} = \frac{-3}{2} \Rightarrow a = -2$$

گزینه «۱»

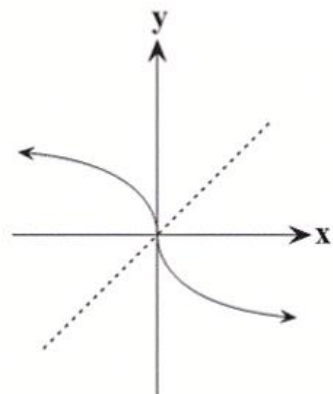
دقت کنید که برای تابع وارون‌پذیر h اگر $h(x_0) = y_0$ آن‌گاه $h^{-1}(y_0) = x_0$. در این مسئله: $f^{-1}(\underbrace{g(\mathfrak{F})}_{x_0}) = \underbrace{\mathfrak{H}}_{y_0} \Rightarrow f(\mathfrak{H}) = g(\mathfrak{F})$ (*)

$$g^{-1}(\underbrace{f^{-1}(\mathfrak{J})}_{x_0}) = \underbrace{\mathfrak{F}}_{y_0} \Rightarrow g(\mathfrak{F}) = f^{-1}(\mathfrak{J}) \quad (**)$$

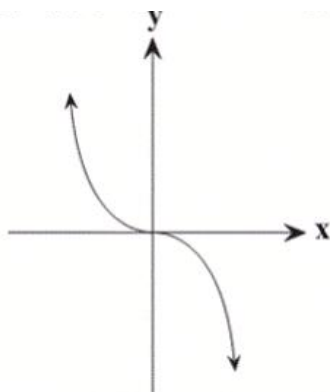
از (*) و (**) داریم: $\underbrace{f(\mathfrak{H})}_{y_0} = f^{-1}(\underbrace{\mathfrak{J}}_{x_0}) \Rightarrow f(f(\mathfrak{H})) = f(f^{-1}(\mathfrak{J})) = \mathfrak{J}$

گزینه «۳»

ابتدا خود تابع را رسم می‌کنیم:



برای رسم وارون تابع، آن را نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم قرینه می‌کنیم:



ساده

درصد پاسخگویی ۳۲٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۴

سوال ۱۲

گزینه «۴»

اگر $a = f^{-1}(4)$ باشد، آن گاه داریم: $f(a) = 4$. حال مقدار a را به دست می آوریم:

$$f(a) = g(2a + 5) = 4 \Rightarrow 2a + 5 = g^{-1}(4)$$

$$\xrightarrow{g^{-1}(4) = \sqrt[5]{8 \times 4} = 2} 2a + 5 = 2 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

بنابراین: $a = f^{-1}(4) = -\frac{3}{2}$